

Tree 解题报告

杭州外国语学校 陈立杰

Contents

1	题目回顾	2
1.1	题目大意	2
1.2	数据范围	2
2	基础知识	2
3	20分算法	3
4	100分算法	3
4.1	引理1	3
4.2	引理2	3
4.3	引理3	3
4.4	算法	4
4.5	时间复杂度的优化	4
5	构造数据的方法	4

1 题目回顾

1.1 题目大意

给你一个 N 个点， M 条边的无向带权连通图，每条边是黑色或白色。让你求一棵最小权的恰好有 $need$ 条白色边的生成树。 题目保证有解。

1.2 数据范围

- 5% : $N \leq 10$
- 20% : $N \leq 15$
- 100% : $N \leq 50000, E \leq 100000$

2 基础知识

- 最小生成树的Kruscal算法相信参加NOI的选手都会这个算法.

3 20分算法

考虑动态规划，令状态为当前树包含的点集合和当前树中有几条白色边。转移就是考虑新加入一个点，它连到哪个已有点上，并且新连的边是黑是白。

复杂度： $O(2^n n^3)$

4 100分算法

4.1 引理1

对于一个图，如果存在一个生成树，它的白边数量为 x ，那么就称 x 是合法白边数。所有的合法白边数形成一个区间 $[l, r]$ 。

引理1的证明

不妨令 $F(\textit{order})$ 表示根据 \textit{order} 这个顺序进行kruskal算法，所能得到的生成树。

那么我们考虑 $F(\{\textit{black}\} \rightarrow \{\textit{white}\})$ ，就是先黑边再白边，这个生成树中的白边数量显然是最少的。令树中白边的集合为 $\{\textit{goodwhite}\}$ ，另外的白边就为 $\{\textit{badwhite}\}$ 。

那么 $l = |\{\textit{goodwhite}\}|$

再考虑 $F(\{\textit{goodwhite}\} \rightarrow \{\textit{badwhite}\} \rightarrow \{\textit{black}\})$ 。这个生成树中白边数量显然是最多的。同时必然包含 $\{\textit{goodwhite}\}$ 。不妨令这个生成树中，属于 $\{\textit{badwhite}\}$ 的白边集合为 $\{\textit{usefulwhite}\}$ 。

那么 $r = |\{\textit{usefulwhite}\}| + |\{\textit{goodwhite}\}|$

考虑任意一个 $l \leq m \leq r$ 。

我们从 $\{\textit{usefulwhite}\}$ 中取 $m - l$ 条边组成 $\{\textit{curwhite}\}$ 。

那么 $F(\{\textit{goodwhite}\} \rightarrow \{\textit{curwhite}\} \rightarrow \{\textit{black}\})$ 就是有 m 条白边的生成树。

4.2 引理2

对于一个图，如果存在一个最小生成树，它的白边数量为 x ，那么就称 x 是最小合法白边数。所有的最小合法白边数形成一个区间 $[l, r]$ 。

引理2的证明

考虑所有权为 x 的边，显然所有 $< x$ 的边，形成的连通性是跟 $< x$ 的边选了哪些无关的。

那么根据引理1，权为 x 的可行白边数量是一个区间。

由于每个权可行数量是一个区间，自然全部可行数量也是一个区间了。

4.3 引理3

考虑子问题：将所有白边加上值 x 得到的图的最小生成树。如果该树有 a 条白边。那么这个生成树就是 a 条白边最小生成树的问题的一个最优解。

引理3的证明

考虑反证法，如果这个生成树比 a 条白边最小生成树的问题的最优解劣。那么将 a 条白边最小生成树的问题的最优解代入该子问题，可以得到该子问题更优的解，矛盾。

4.4 算法

令 $F(x)$ 表示将所有白边的权值+上 x 之后，最小生成树中最少有几条白边。

同时令 $G(x)$ 表示将所有白边的权值+上 x 之后，最小生成树中最多有几条白边。

显然随着 x 的增大， $F(x), G(x)$ 会变小。

如何求 $F(x)$?, 只需要在边权相同（白边已+了 x ）的情况下，将黑边排在前面，进行kruscal即可。 $G(x)$ 同理。

注意到 $G(x) = F(x - 1)$ 。

我们只需要二分 x ，得到一个 $need \in [F(x), G(x)]$ 的 x 。那么根据引理3即可得出答案。

复杂度 $O((n \log n + m) \log W)$

4.5 时间复杂度的优化

上一个算法已经能通过所有数据并获得满分，不过我们可以得到时间复杂度更优的算法。注意到求 $F(x)$ 时，我们需要白边+ x 之后按边权的顺序，注意到白边内部和黑边内部的顺序是不变的。我们只需要事先将白边黑边分别排序，之后用 $O(m)$ 的合并得出顺序即可。

复杂度 $O(m \log W + n \log n)$

5 构造数据的方法

所有数据都是通过先构造一个随机树，然后再加入一些其它的边的方法来构造的。