线性代数

Stilwell

2015 年 12 月

行列式

由n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$组成的n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{简记作}|a_{ij}|_1^n)$$

是一个算式，当$n=1$时，定义$D=|a_{11}|=a_{11}$。当$n\geq 2$时，定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$。

余子式 代数余子式

M_{1j}是D中去掉第1行第j列全部元素后，按原顺序排成的$n-1$阶行列式，即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

并称M_{1j}为元素a_{1j}的**余子式**，A_{1j}为元素a_{1j}的**代数余子式**。

主对角线 主对角元 副对角线

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$所在的对角线称为行列式的**主对角线**。
相应地$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$称为**主对角元**。
另一条对角线称为行列式的**副对角线**。

展开式

由定义可见，行列式这个算式是由其n^2个元素a_{ij}构成的n次齐次多项式（称作**展开式**）。
n阶行列式的展开式共有$n!$项，带正号的项和带负号的项各占一半（$n > 1$）。
当第一行元素为$x_1, x_2, \ldots, x_n$时，n阶行列式是$x_1, x_2, \ldots, x_n$的一次齐次多项式。

- 将矩阵A的行列式的展开式的每一项都提取出来，可以得到另一种定义方法：

$$det(A)=\sum_{\sigma}(-1)^{s(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}A_{i\sigma(i)}$$

- 其中σ表示一个$1\sim n$的排列，$s(\sigma)$表示排列σ的逆序对数量。

例1

证明n阶下三角行列式（当$i<j$时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上元素全为0）

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

例1

证明n阶下三角行列式（当$i<j$时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上元素全为0）

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

- 对n作数学归纳法，当$n=1$时，结论成立。

例1

证明n阶下三角行列式（当$i < j$时，$a_{ij} = 0$，即主对角线以上元素全为0）

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

- 对n作数学归纳法，当$n = 1$时，结论成立。

$$D_n = (-1)^{1+1}a_{11}det(|a_{ij}|_n^2) = a_{11}(a_{22}a_{33}\dots a_{nn})$$

例2

计算n阶行列式（副对角线以上元素全为0）

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \dots & * & * \\ a_1 & * & \dots & * & * \end{vmatrix}$$

其中，$a_i \neq 0$，*表示元素为任意数。

例2

计算n阶行列式（副对角线以上元素全为0）

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \dots & * & * \\ a_1 & * & \dots & * & * \end{vmatrix}$$

其中，$a_i \neq 0$，*表示元素为任意数。

- 利用行列式的定义，可得到

$$D_n = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$$

性质1

行列式的行与列（按原顺序）互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1

行列式的行与列（按原顺序）互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 这个性质可用数学归纳法证明，由于证明的表述较繁琐，在此略去。

性质2

行列式对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

M_{ij}是D中去掉第i行第j列全部元素后按原顺序排成的$n-1$阶行列式，它称为a_{ij}的**余子式**，A_{ij}称为a_{ij}的**代数余子式**。

性质2

行列式对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

M_{ij}是D中去掉第i行第j列全部元素后按原顺序排成的$n-1$阶行列式，它称为a_{ij}的**余子式**，A_{ij}称为a_{ij}的**代数余子式**。

- 证法与性质1的证明类似，也在此略去。

性质3

（线性性质）有以下两条：

$$(i)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质3

$$(ii)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 利用性质2，将上式中等号左端的行列式按第i行展开，立即可得等号右端的结果。

- 利用性质2，将上式中等号左端的行列式按第i行展开，立即可得等号右端的结果。

推论1

某行元素全为零的行列式其值为零。

性质4

行列式中两行对应元素全相等，其值为零。即
当$a_{il}=a_{jl}(i\neq j, l=1,2,\ldots,n)$时，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

- 用数学归纳法证明。

- 用数学归纳法证明。
- 对二阶行列式显然成立，假设结论对$n-1$阶行列式成立，在n阶的情况下，对第$k(k \neq i,j)$行展开，则

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}A_{kl}$$

- 用数学归纳法证明。
- 对二阶行列式显然成立，假设结论对$n-1$阶行列式成立，在n阶的情况下，对第$k(k \neq i,j)$行展开，则

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}A_{kl}$$

- 由于余子式M_{kl}是$n-1$阶行列式，且其中都有两行元素相同，所以$A_{kl} = (-1)^{k+l}M_{kl} = 0$，故$D = 0$。

- 用数学归纳法证明。
- 对二阶行列式显然成立，假设结论对$n-1$阶行列式成立，在n阶的情况下，对第$k(k\neq i,j)$行展开，则

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\ldots+a_{kn}A_{kn}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl}$$

- 由于余子式M_{kl}是$n-1$阶行列式，且其中都有两行元素相同，所以$A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}=0$，故$D=0$。

推论2

行列式中两行对应元素成比例（即$a_{jl}=ka_{il},i\neq j,l=1,2,\ldots,n$），其值为零。

性质5

在行列式中，把某行各元素分别乘非零常数k，再加到另一行的对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质5

在行列式中，把某行各元素分别乘非零常数k，再加到另一行的对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 利用性质3和推论2，可证明上式成立。

性质6

（反对称性质）行列式的两行对换，行列式的值反号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 设$A = a, B = b$，进行如下操作：

- 设$A=a, B=b$，进行如下操作：
  - $B \leftarrow A+B \quad A=a \quad B=a+b$

- 设$A = a, B = b$，进行如下操作：
  - $B \leftarrow A + B \quad A = a \quad B = a + b$
  - $A \leftarrow A - B \quad A = -b \quad B = a + b$

- 设$A = a, B = b$，进行如下操作：
  - $B \leftarrow A + B \quad A = a \quad B = a + b$
  - $A \leftarrow A - B \quad A = -b \quad B = a + b$
  - $B \leftarrow A + B \quad A = -b \quad B = a$

- 设$A = a, B = b$，进行如下操作：
  - $B \leftarrow A + B \quad A = a \quad B = a + b$
  - $A \leftarrow A - B \quad A = -b \quad B = a + b$
  - $B \leftarrow A + B \quad A = -b \quad B = a$
- 这样即可完成交换操作，最后多出了-1的系数。

- 设$A = a, B = b$，进行如下操作：
  - $B \leftarrow A + B \quad A = a \quad B = a + b$
  - $A \leftarrow A - B \quad A = -b \quad B = a + b$
  - $B \leftarrow A + B \quad A = -b \quad B = a$
- 这样即可完成交换操作，最后多出了-1的系数。
- 重复用性质5，然后在利用性质3，即可完成证明。

性质7

行列式某一行的元素乘另一行对应元素的代数余子式之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \ (i \neq j)$$

- 上式可以还原出一个第j行被第i行元素替换的行列式，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

- 上式可以还原出一个第j行被第i行元素替换的行列式，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

- 根据性质4，其值为零。

SPOJ DETER3 Find The Determinant III

给出一个$n \times n$的矩阵A，求$|A|\ mod\ p$。

$n \leq 200$，$|A_{i,j}| \leq 10^9$，$p \leq 10^9$。

SPOJ DETER3　Find The Determinant III

给出一个$n \times n$的矩阵A，求$|A|\ mod\ p$。

$n \leq 200$，$|A_{i,j}| \leq 10^9$，$p \leq 10^9$。

- 根据行列式的性质，可以用类似高斯消元的方式将矩阵转化为上三角矩阵，行列式即为主对角线元素的积。

SPOJ DETER3 Find The Determinant III

给出一个$n \times n$的矩阵A，求$|A| \ mod \ p$。

$n \leq 200$，$|A_{i,j}| \leq 10^9$，$p \leq 10^9$。

- 根据行列式的性质，可以用类似高斯消元的方式将矩阵转化为上三角矩阵，行列式即为主对角线元素的积。
- 消元的过程可以转化为类似欧几里德辗转相除的形式来完成，这样就不需要用到乘法逆元。

SPOJ DETER3　Find The Determinant III

给出一个$n \times n$的矩阵A，求$|A|\ mod\ p$。

$n \leq 200$，$|A_{i,j}| \leq 10^9$，$p \leq 10^9$。

- 根据行列式的性质，可以用类似高斯消元的方式将矩阵转化为上三角矩阵，行列式即为主对角线元素的积。
- 消元的过程可以转化为类似欧几里德辗转相除的形式来完成，这样就不需要用到乘法逆元。
- 复杂度$O(n^3 \log A)$。

Problem Seven

给定一张N个点M条边的有向无环图。
保证有恰好K个点入度为0，称之为源，K个点出度为0，称之为汇，将源与汇的K个点分别标号为$1\sim K$。

从图中选出K条没有公共点的路径，每条路径经过一个源与一个汇，不妨设从源i出发的边到达了汇T_i。
如果一组路径的数列T中逆序对个数是偶数，答案加1，否则答案减1，求答案模质数p后的值。

$N\leq 600$，$M\leq 10^5$，$p\leq 1000000007$。

- 相交的情况并不影响答案。

- 相交的情况并不影响答案。
  - $i \to x \to T_i$，$j \to x \to T_j$

- 相交的情况并不影响答案。
  - $i \to x \to T_i$，$j \to x \to T_j$
  - $i \to x \to T_j$，$j \to x \to T_i$

- 相交的情况并不影响答案。
  - $i \to x \to T_i$，$j \to x \to T_j$
  - $i \to x \to T_j$，$j \to x \to T_i$
  - 这两种情况一定成对出现，且对答案的贡献正好抵消。

- 相交的情况并不影响答案。
  - $i \to x \to T_i$，$j \to x \to T_j$
  - $i \to x \to T_j$，$j \to x \to T_i$
  - 这两种情况一定成对出现，且对答案的贡献正好抵消。
- 设$A_{i,j}$为从第i个源到第j个汇的路径数，可以拓扑计算，答案即为$|A|$。

- 相交的情况并不影响答案。
  - $i \to x \to T_i$，$j \to x \to T_j$
  - $i \to x \to T_j$，$j \to x \to T_i$
  - 这两种情况一定成对出现，且对答案的贡献正好抵消。
- 设$A_{i,j}$为从第i个源到第j个汇的路径数，可以拓扑计算，答案即为$|A|$。
- 复杂度$O(KM + K^3)$

范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

- 用数学归纳法证明，当$n = 2$时显然成立。

- 在V_n中，从第n行起，依次将前一行乘$-x_1$加到后一行，得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) & {x_3}^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

- 在V_n中，从第n行起，依次将前一行乘$-x_1$加到后一行，得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) & {x_3}^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

- 按第1列展开，并提取公因子，得

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

- 在V_n中，从第n行起，依次将前一行乘$-x_1$加到后一行，得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) & {x_3}^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

- 按第1列展开，并提取公因子，得

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

- 上式右端的行列式是$n-1$阶范德蒙行列式。

- 在V_n中，从第n行起，依次将前一行乘$-x_1$加到后一行，得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) & {x_3}^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

- 按第1列展开，并提取公因子，得

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

- 上式右端的行列式是$n-1$阶范德蒙行列式。
- 根据归纳结论得证。

克拉默法则

设线性非齐次方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

其中D_j是用常数项$b_1, b_2, \ldots, b_n$替换D中第j列所成的行列式。

- 先证$x_j=\frac{D_j}{D}$是方程组的解，根据定义有

$$D_j=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}$$

- 先证$x_j = \frac{D_j}{D}$是方程组的解，根据定义有

$$D_j = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$$

- 其中A_{kj}是系数行列式中元素a_{kj}的代数余子式。

- 先证$x_j=\frac{D_j}{D}$是方程组的解，根据定义有

$$D_j=\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$$

- 其中A_{kj}是系数行列式中元素a_{kj}的代数余子式。
- 将$x_j=\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$代入方程中，得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}\right) &= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}A_{kj}b_k\right)\\ &= \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right)\end{aligned}$$

- 由性质4易得，当$i \neq k$时

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$$

- 由性质4易得，当$i \neq k$时

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$

- 即还原出的行列式中有两行元素相同。

- 由性质4易得，当$i \neq k$时

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$

- 即还原出的行列式中有两行元素相同。
- 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}\right) &= \frac{1}{D} b_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}\right) \\ &= \frac{1}{D} b_i D = b_i\end{aligned}$$

- 再证解是唯一的，设$c_1, c_2, \ldots, c_n$是一组解，则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

- 再证解是唯一的，设$c_1, c_2, \ldots, c_n$是一组解，则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

- 在上面n个等式两端，分别依次乘$A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$，然后再把这$n$个等式两端相加，得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ij} \right) c_k &= \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} \\ D c_j &= D_j \end{aligned}$$

- 再证解是唯一的，设$c_1, c_2, \ldots, c_n$是一组解，则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

- 在上面n个等式两端，分别依次乘$A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$，然后再把这$n$个等式两端相加，得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ij} \right) c_k &= \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} \\ D c_j &= D_j \end{aligned}$$

- 由此证明了$c_1, c_2, \ldots, c_n$如果是解，它们也必然分别等于$\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D}$，于是方程组的解的唯一性得证。

矩阵的加法

设$C = A + B$，那么$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$。

矩阵的数乘

设$C = kA$，那么$C_{ij} = kA_{ij}$。

矩阵的乘法

A是一个$m \times n$的矩阵，
B是一个$n \times s$的矩阵，
$C = AB$是一个$m \times s$的矩阵，那么

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

结论1

矩阵的乘法不满足交换律。

结论1

矩阵的乘法不满足交换律。

- 在定义中，若$m \neq s$那么BA不可乘。

结论1

矩阵的乘法不满足交换律。

- 在定义中，若$m \neq s$那么BA不可乘。
- 矩阵乘法不满足交换律，并不代表对于任意矩阵A, B均有$AB \neq BA$。

结论1

矩阵的乘法不满足交换律。

- 在定义中，若$m \neq s$那么BA不可乘。
- 矩阵乘法不满足交换律，并不代表对于任意矩阵A, B均有$AB \neq BA$。
- 例如，若

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

结论1

矩阵的乘法不满足交换律。

- 在定义中，若$m \neq s$那么BA不可乘。
- 矩阵乘法不满足交换律，并不代表对于任意矩阵A, B均有$AB \neq BA$。
- 例如，若

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 2B$$

结论2

由矩阵乘积$AB=0$（零矩阵），不能推出$A=0$或$B=0$。
即$A\neq 0$且$B\neq 0$，有可能使$AB=0$。

结论2

由矩阵乘积$AB = 0$（零矩阵），不能推出$A = 0$或$B = 0$。
即$A \neq 0$且$B \neq 0$，有可能使$AB = 0$。

- 如果以A为系数矩阵的线性方程组有非零解，则将非零解按列排成的矩阵B，就有$AB = 0$。

结论3

矩阵乘法不满足消去律。
即$A \neq 0$时，由$AB = AC$不能推出$B = C$。

结论3

矩阵乘法不满足消去律。
即$A \neq 0$时，由$AB = AC$不能推出$B = C$。

- 因为

$$AB = AC \Rightarrow AB - AC = 0 \Rightarrow A(B - C) = 0$$

结论3

矩阵乘法不满足消去律。
即$A \neq 0$时，由$AB = AC$不能推出$B = C$。

- 因为

$$AB = AC \Rightarrow AB - AC = 0 \Rightarrow A(B - C) = 0$$

- 根据结论2可得，$B - C$可以不为0。

- 当A为非奇异矩阵，即行列式$|A| \neq 0$时

- 当A为非奇异矩阵，即行列式$|A| \neq 0$时
  - 若$AB = 0$，则必有$B = 0$。

- 当A为非奇异矩阵，即行列式$|A| \neq 0$时
  - 若$AB = 0$，则必有$B = 0$。
  - 若$AB = AC$，则必有$B = C$。

- 当A为非奇异矩阵，即行列式$|A| \neq 0$时
  - 若$AB = 0$，则必有$B = 0$。
  - 若$AB = AC$，则必有$B = C$。
- 书上的证明是“读者以后会理解”。

- 当A为非奇异矩阵，即行列式$|A| \neq 0$时
  - 若$AB = 0$，则必有$B = 0$。
  - 若$AB = AC$，则必有$B = C$。
- 书上的证明是“读者以后会理解”。
- 矩阵乘法满足下列运算律：

- 当A为非奇异矩阵，即行列式$|A| \neq 0$时
  - 若$AB = 0$，则必有$B = 0$。
  - 若$AB = AC$，则必有$B = C$。
- 书上的证明是“读者以后会理解”。
- 矩阵乘法满足下列运算律：
  - $(AB)C = A(BC)$

- 当A为非奇异矩阵，即行列式$|A| \neq 0$时
  - 若$AB = 0$，则必有$B = 0$。
  - 若$AB = AC$，则必有$B = C$。
- 书上的证明是“读者以后会理解”。
- 矩阵乘法满足下列运算律：
  - $(AB)C = A(BC)$
  - $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

- 当A为非奇异矩阵，即行列式$|A| \neq 0$时
  - 若$AB = 0$，则必有$B = 0$。
  - 若$AB = AC$，则必有$B = C$。
- 书上的证明是“读者以后会理解”。
- 矩阵乘法满足下列运算律：
  - $(AB)C = A(BC)$
  - $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
  - $A(B + C) = AB + AC$，$(B + C)A = BA + CA$

定理1

设A, B是两个n阶矩阵，则乘积AB的行列式等于A和B的行列式的乘积，即

$$|AB| = |A||B|$$

- 设$A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$，有

$$|A||B|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

- 用第$n+1\sim 2n$行消去第1行，得

$$|A||B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

- 用第$n+1\sim 2n$行消去第1行，得

$$|A||B|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

- 其中

$$c_{1j}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj}$$

- 用相同的方式不断消去，得

$$|A||B| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{vmatrix} = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & -I \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n |AB|| - I_n| = (-1)^n |AB| (-1)^n = |AB|$$

转置矩阵

把一个$m \times n$的矩阵行列互换得到的一个$n \times m$矩阵，称之为A的**转置矩阵**，记作A^T或A'。

转置矩阵

把一个$m \times n$的矩阵行列互换得到的一个$n \times m$矩阵，称之为A的**转置矩阵**，记作A^T或A'。

- 矩阵的转置运算满足以下运算规律：

转置矩阵

把一个$m \times n$的矩阵行列互换得到的一个$n \times m$矩阵，称之为A的**转置矩阵**，记作A^T或A'。

- 矩阵的转置运算满足以下运算规律：
  - $(A^T)^T = A$

转置矩阵

把一个$m \times n$的矩阵行列互换得到的一个$n \times m$矩阵，称之为A的**转置矩阵**，记作A^T或A'。

- 矩阵的转置运算满足以下运算规律：
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$

转置矩阵

把一个$m \times n$的矩阵行列互换得到的一个$n \times m$矩阵，称之为A的**转置矩阵**，记作A^T或A'。

- 矩阵的转置运算满足以下运算规律：
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(kA)^T = kA^T$

转置矩阵

把一个$m \times n$的矩阵行列互换得到的一个$n \times m$矩阵，称之为A的**转置矩阵**，记作A^T或A'。

- 矩阵的转置运算满足以下运算规律：
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(kA)^T = kA^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$

转置矩阵

把一个$m \times n$的矩阵行列互换得到的一个$n \times m$矩阵，称之为A的**转置矩阵**，记作A^T或A'。

- 矩阵的转置运算满足以下运算规律：
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(kA)^T = kA^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$
  - $(A_1 A_2 \ldots A_k)^T = A_k^T \ldots A_2^T A_1^T$

对称矩阵

对于一个n阶矩阵A，如果$a_{ij} = a_{ji}$，则称A为**对称矩阵**

反对称矩阵

对于一个n阶矩阵A，如果$a_{ij} = -a_{ji}$，则称A为**反对称矩阵**

对称矩阵

对于一个n阶矩阵A，如果$a_{ij}=a_{ji}$，则称A为**对称矩阵**

反对称矩阵

对于一个n阶矩阵A，如果$a_{ij}=-a_{ji}$，则称A为**反对称矩阵**

- A为对称矩阵的充要条件是$A^T=A$。

对称矩阵

对于一个n阶矩阵A，如果$a_{ij}=a_{ji}$，则称A为**对称矩阵**

反对称矩阵

对于一个n阶矩阵A，如果$a_{ij}=-a_{ji}$，则称A为**反对称矩阵**

- A为对称矩阵的充要条件是$A^T=A$。
- A为反对称矩阵的充要条件是$A^T=-A$。

可逆矩阵 逆矩阵

对于一个n阶矩阵A，如果存在n阶矩阵B使得

$$AB = BA = I$$

就称A为**可逆矩阵**（简称A**可逆**），并称B是A的**逆矩阵**，记作A^{-1}，即$A^{-1} = B$。
由定义可知，可逆矩阵及其逆矩阵是同阶方阵，在上式中，A与B的地位是平等的，所以也可称A是B的逆矩阵。

定理1

若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的。

定理1

若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的。

- 设B和C都是A的逆矩阵，则

$$AB = BA = AC = CA = I$$

定理1

若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的。

- 设B和C都是A的逆矩阵，则

$$AB = BA = AC = CA = I$$

- 可得

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

定理1

若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的。

- 设B和C都是A的逆矩阵，则

$$AB = BA = AC = CA = I$$

- 可得

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

- 故A的逆矩阵是唯一的。

伴随矩阵

设n阶矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_{ij}是行列式$detA$中元素a_{ij}的代数余子式，我们称

$$cofA=(A_{ij})_{n\times n}$$

为A的代数余子式矩阵，并称$cofA$的转置矩阵为A的伴随矩阵，记作$adjA$或A^*。

定理2

矩阵A可逆的充分必要条件为$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

定理2

矩阵A可逆的充分必要条件为$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

- $AA^* = A^*A = |A|I$

定理2

矩阵A可逆的充分必要条件为$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

- $AA^* = A^*A = |A|I$
  - 第i行元素乘第i行的代数余子式得到$|A|$，乘第j行代数余子式得到0。

定理2

矩阵A可逆的充分必要条件为$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

- $AA^* = A^*A = |A|I$
  - 第i行元素乘第i行的代数余子式得到$|A|$，乘第j行代数余子式得到0。
- 可得

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I$$

定理2

矩阵A可逆的充分必要条件为$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

- $AA^* = A^*A = |A|I$
  - 第i行元素乘第i行的代数余子式得到$|A|$，乘第j行代数余子式得到0。
- 可得

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

推论

若A, B都是n阶矩阵，且$AB = I$。
则$BA = I$，即A, B皆可逆，且A, B互为逆矩阵。

推论

若A, B都是n阶矩阵，且$AB = I$。
则$BA = I$，即A, B皆可逆，且A, B互为逆矩阵。

- 由$AB = I$得$|A||B| = 1$，$|A|, |B| \neq 0$，所以A, B皆可逆。

推论

若A, B都是n阶矩阵，且$AB = I$。
则$BA = I$，即A, B皆可逆，且A, B互为逆矩阵。

- 由$AB = I$得$|A||B| = 1$，$|A|, |B| \neq 0$，所以A, B皆可逆。
- 于是

$$AB = I$$

推论

若A, B都是n阶矩阵，且$AB = I$。
则$BA = I$，即A, B皆可逆，且A, B互为逆矩阵。

- 由$AB = I$得$|A||B| = 1$，$|A|, |B| \neq 0$，所以A, B皆可逆。
- 于是

$$AB = I$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}(AB)A = A^{-1}IA$$

推论

若A, B都是n阶矩阵，且$AB = I$。
则$BA = I$，即A, B皆可逆，且A, B互为逆矩阵。

- 由$AB = I$得$|A||B| = 1$，$|A|, |B| \neq 0$，所以A, B皆可逆。
- 于是

$$AB = I$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}(AB)A = A^{-1}IA$$

$$\Rightarrow \quad BA = I$$

- 可逆矩阵满足以下运算规律

- 可逆矩阵满足以下运算规律
  - 设同阶方阵A, B皆可逆，数$k \neq 0$。

- 可逆矩阵满足以下运算规律
  - 设同阶方阵A, B皆可逆，数$k \neq 0$。
  - $(A^{-1})^{-1} = A$

- 可逆矩阵满足以下运算规律
  - 设同阶方阵A, B皆可逆，数$k \neq 0$。
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

- 可逆矩阵满足以下运算规律
  - 设同阶方阵A, B皆可逆，数$k \neq 0$。
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- 可逆矩阵满足以下运算规律
  - 设同阶方阵A, B皆可逆，数$k \neq 0$。
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- 可逆矩阵满足以下运算规律
  - 设同阶方阵A, B皆可逆，数$k \neq 0$。
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
  - $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

初等倍乘矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等倍加矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & c & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等对换矩阵

$$
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 0 &&&& 1 && \\
&&& 1 &&&&& \\
&&&& \ddots &&&& \\
&&&&& 1 &&& \\
&& 1 &&&& 0 && \\
&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
$$

- 利用初等变换矩阵可以完成高斯消元的操作。

- 利用初等变换矩阵可以完成高斯消元的操作。
- 对于

$$A^{-1}A = I$$

- 利用初等变换矩阵可以完成高斯消元的操作。
- 对于

$$A^{-1}A = I$$

- 等式两侧乘上一些初等变换矩阵B将A消为单位矩阵

$$A^{-1}(AB) = IB$$

- 利用初等变换矩阵可以完成高斯消元的操作。
- 对于

$$A^{-1}A = I$$

- 等式两侧乘上一些初等变换矩阵B将A消为单位矩阵

$$A^{-1}(AB) = IB$$

$$A^{-1} = B$$

- 利用初等变换矩阵可以完成高斯消元的操作。
- 对于

$$A^{-1}A = I$$

- 等式两侧乘上一些初等变换矩阵B将A消为单位矩阵

$$A^{-1}(AB) = IB$$

$$A^{-1} = B$$

- 可以用初等变换矩阵来求逆矩阵。

- 未完待续

- 百度百科 & Wikipedia
- 居余马，线性代数，清华大学出版社
- 李超，线性代数在OI中的应用与题目讲解